

2026春复变函数动态进出试题

1. 设 $f(z)$ 是单位圆盘 $V(0, 1)$ 到中心在原点的长方形区域的解析同构, 且满足 $f(0) = 0$. 证明: $f(z)$ 是奇函数.
2. 设 D 是以原点为中心, 以 z_1, z_2, z_3, z_4 (逆时针方向) 为顶点的正方形区域, $f(z) \in H(D) \cap C(\bar{D})$. 已知满足以下条件:

(i) $\forall z \in \bar{D}$, 有 $|f(z)| \leq M$;

(ii) $\forall z \in \overline{z_1 z_2}$, $|f(z)| \leq m$.

证明:

(1) $|f(0)| < m^{\frac{1}{4}} M^{\frac{3}{4}}$;

(2) $\forall z \in \Delta o z_1 z_2$, 有 $|f(z)| < m^{\frac{1}{4}} M^{\frac{3}{4}}$

3. 设 D 是开域, 且 $\overline{V(0, 1)} \subseteq D$, $f(z)$ 在 D 内解析. 证明: 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 有

$$f^n(0) = \frac{n!}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}(f(e^{i\theta})) e^{-in\theta} d\theta$$

4. 设 D 为有界开域, $f: D \rightarrow D$ 是解析同构. 若存在 $z_0 \in D$ 使得 $f(z_0) = z_0$, 证明:

$$|f'(z_0)| \leq 1$$

。