2025春复变函数动态进出真题

1. a 是复数，$n \geq 2$，证明：$az^n + z + 1$ 在 $|z| \leq 2$ 上至少有一个根。

2. $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$，$f \in H(\Omega)$，$f$ 单叶且 $\mathrm{Re}(f(z)) > 0, \forall z \in \Omega$。若 $\exists a \in \Omega$ 使得 $f(a) = a$，证明：$|f'(a)| \leq 1$。

3. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \mathrm{Im}(z) > 0\}$，$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$，$B = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$，$f \in H(D)$，$f \in C(\overline{D})$ 且 f 处处非零。已知对 $\forall z \in A, |f(z)| = 1$；对 $\forall z \in B, f(z)$ 为实数。证明：f 是常数。

4. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \mathrm{Re}(z) < b, a < b\}$，$f \in H(D)$。已知对 $\forall z \in \partial D, |f(z)| \leq 1$；对 $\forall z \in D, |f(z)| \leq 2025$。证明：对 $\forall z \in D, |f(z)| \leq 1$。