2022春常微分方程动态进出考试

一、存在唯一性与解的性质

证明初值问题：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

没有连续的解（甚至没有连续的局部解），其中

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{当 } 1 \leq |x+y| < +\infty; \\ (-1)^n, & \text{当 } \frac{1}{n+1} \leq |x+y| < \frac{1}{n}, \quad (n = 1, 2, \dots); \\ 0, & \text{当 } |x+y| = 0. \end{cases}$$

二、线性微分方程组及其稳定性

(1) 考虑微分方程组

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + g(t, \mathbf{y})$$

其中 A 是一个 $n \times n$ 实矩阵，其全部特征值的实部均小于一个实常数 α；$g(t, \mathbf{y})$ 在 $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ 连续，且满足 $|g(t, \mathbf{y})| \leq h(t)|\mathbf{y}|$，这里 $h(t)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的连续函数。

证明： 存在正常数 K 使得其的任一解 $\mathbf{y}(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上均满足

$$|\mathbf{y}(t)| \leq K|\mathbf{y}(0)|e^{\alpha t + KH(t)}$$

其中 $H(t) = \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s$。

(2) 考虑线性微分方程组

$$\mathbf{y}' = (A + B(t))\mathbf{y}$$

其中 A 是一个 $n \times n$ 实矩阵，其全部特征值的实部均小于 0；$B(t)$ 是一个定义在 $[0, +\infty)$ 的 $n \times n$ 连续实值矩阵函数，且满足

$$\int_0^{+\infty} |B(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$$

结论： 请判断方程零解的稳定性。