组合论期末复习试卷 2

一 、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．从 5 元集合中可重复的取 3 元子集的取法数为 (B).

(A) 25； (B) 35； (C) 45； (D) 55．

2．把 n 个相同的球放入 k 个相同的盒子里，且每个盒中至少放 1 个球的方案数等于 (D).

(A) n 元集的 k-组合数； (B) n 元集的 k-划分的个数；

(C) n 的有序 k 分拆的个数； (D) n 的 k 分拆的个数.

3．设 n, k 为正整数且 $n \geq k$，则有 $\binom{n}{k} =$ (C).

(A) $\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k}$； (B) $\binom{n-2}{k} + \binom{n-1}{k}$； (C) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$； (D) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2}$.

4．设 $f(n) = 2^n$，则 $\Delta^{50} f(0) =$ (A).

(A) 1； (B) 2； (C) 4； (D) 8．

5. 设 a_n 为 n 元集合的所有子集的个数，则其生成函数为 (D).

(A) $\frac{1}{1+x}$; (B) $\frac{1}{1-x}$; (C) $\frac{1}{1+2x}$; (D) $\frac{1}{1-2x}$.

二 、证明题（第 1 小题 8 分，其他每小题 10 分，共 38 分）

1（8 分）．使用组合学推理证明第二类 Stirling 数 $S(n,k)$ 满足递推关系：
$S(n+1,k) = S(n,k-1) + kS(n,k), \quad (1 \leq k \leq n)$.

证明：令 $S(n+1,k)$是集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}\}$ 的 k 划分的个数，则这些 k 划分可以分成两类：

第 1 类：$\{a_{n+1}\}$ 是 A 的 k 划分中单独的一块，则只需对集合 $A - \{a_{n+1}\}$ 进行 $k-1$ 划分，在并上 $\{a_{n+1}\}$ 这一块，就构成了 A 的 k 划分。因此，这类划分共有$S(n,k-1)$个。

第 2 类：$\{a_{n+1}\}$ 不是 A 的 k 划分中单独的一块，此时，先构造 $A - \{a_{n+1}\}$ 的 k 划分，共有$S(n,k)$种方法，然后将 a_{n+1} 插入到该 k 划分的 k 个块中的某一块，故共有$kS(n,k)$种方法。

因此，由加法原则可知，递推关系成立。

2（10 分）．使用组合学推理证明恒等式：$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$.

证明: 考虑n个人，用如下两种方式从中挑选k个人:

(1) 先选一人为队长，然后再选其余$k-1$个人，由乘法原则可知，

其方法数为$n\binom{n-1}{k-1}$。

(2)先从n个人种选k个人，在从这k个人中选一人为队长，其方法数为$k\binom{n}{k}$。

而（1）与（2）描述同一件事，故恒等式成立。

3（10 分）．设 $g(n,m)$ 表示由 n 元集合 N 到 m 元集合 M 的满射的个数，利用二项式反演公式证明：$g(n,m)=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}k^n$.

证明: 设 n 是任一取定的正整数, 则对任一正整数m, n元集N到m元集M的映射共有m^n. 其中，使得 $f(N)$是M的$k(1\le k\le m)$元子集的满射有$\binom{m}{k}g(n,k)$个.

于是，由加法原则可得$m^n=\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}g(n,k)$。所以，由二项式反演公式，取$a_m=m^n$，

$b_m=g(n,k)$可得$g(n,m)=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}k^n$.

4（10 分）．现从边长为 2 的正方形范围中任选 5 个点，证明：必存在 2 个点，其距离不超过 $\sqrt{2}$.

证明: 将此正方形分割成 4 个边长为 1 的小正方形. 当有 2 个点位于其中一个小正方形时，这两个点之间的距离不会超过小正方形对角线的长$\sqrt{2}$. 而由鸽巢原理可知，5 个点中必至少有 2 个点位于一个小正方形中.

三、解答题（第 1 小题 7 分，其他每小题 10 分，共 47 分）

1（7 分）．将 m 个正号和 n 个负号排成一条直线，求不存在两个负号相邻的排法数.

解法一: 对于这些符号的排列，q 个负号将排列分隔成$q+1$段。

设第一个负号的左侧有x_1个正号，第一个负号与第二个负号之间有x_2个正

号，……，最后一个负号右侧有 x_{q+1} 个正号。

由于没有两个负号相邻，故方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{q+1} = p，其中 x_1, x_{q+1} \ge 0, x_i \ge 1 (i = 2,3,\cdots,q)$$

的整数解的个数就是问题的解，作变量替换

$$y_1 = x_1, y_i = x_i - 1 (i = 2,3,\cdots,q), y_{q+1} = x_{q+1}$$

则方程变成

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{q+1} = p - (q-1)，其中，\ y_i \ge 0 (i = 1,2,\cdots,q+1)$$

其解的个数为

$$\binom{p-(q-1)+q+1-1}{p-(q-1)} = \binom{p+1}{p+1-q} = \binom{p+1}{q}$$

解法二：

当$m < n-1$ 必有负号相邻，此时排列数为 0

否则, m 个正号生成$m+1$ 个位置，从中选取n 个位置放入负号，共$\binom{m+1}{n}$种排法。

2（10 分）．求 $S = \{1,2,\ldots,9\}$ 的至少有一个奇数在它的自然位置上的排列数.

解：设

$A_1 = \{S中 i_1 = 1排列\}$, $A_2 = \{S中 i_3 = 3排列\}$, $A_3 = \{S中 i_5 = 5排列\}$,

$A_4 = \{S中 i_7 = 7排列\}$, $A_5 = \{S中 i_9 = 9排列\}$,则问题变成求$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5|$。

而$|A_1|=|A_2|=|A_3|=|A_4|=|A_5|$=8！，

$|A_1 \cap A_2|$=……=$|A_4 \cap A_5|$=7！(共 10 个)，

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$=……=$|A_3 \cap A_4 \cap A_5|$=6！(共 10 个)，

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$=……=$|A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|$=5！(共 5 个)，

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|$=4！。

因此$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| = 5 \times 8! - 10 \times 7! + 10 \times 6! - 5 \times 5! + 4!$.

3（10 分）．求解常系数线性齐次递推关系：$h_n = h_{n-1} + 9h_{n-2} - 9h_{n-3}$，$h_0 = 0, h_1 = 1, h_2 = 2$.

解：特征方程 $x^3-x^2-9x+9=0$ 的根为 1,3,-1,故一般解为 $h_n=c_1 1^n+c_2 3^n+c_3(-3)^n$。

由初始条件

$$得\begin{cases}c_1+c_2+c_3=0\\ c_1+3c_2-3c_3=0\\ c_1+9c_2+9c_3=0\end{cases}$$

解得 $c_1=-\frac{1}{4},c_2=\frac{1}{3},c_3=-\frac{1}{12}$，因此 $h_n=-\frac{1}{4}+3^{n-1}-\frac{1}{12}(-3)^n$

4（10 分）．设序列 $\{h_n\}_{n\geq 0}$ 由 $h_n=2n^2-n+3$ 定义，计算其差分表，并求 $\sum_{k=0}^{n} h_k$.

解：差分表为

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & & 4 & & 9 & & \cdots \\ & 1 & & 5 & & \cdots & \\ & & 4 & & \cdots & & \end{array}$$

$h_n=3\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+4\binom{n}{2}$。

$$\sum_{k=0}^{n} h_k=3\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{0}+\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{1}+4\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{2}=3\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+4\binom{n}{2}$$

5（10 分）．设 $f(n)$ 表示满足如下条件的格路径的个数：

1) 从 (0,0) 出发走 n 步； 2) 每步只能向右、左或上移动一个整数格点； 3) 自身不相交。

给出 $f(n)$ 满足的递推关系，并求 $f(n)$ 的显式公式.

解：令 E,W,N 分别表示向右、左或上移动一个整数格点，则走 n 步的格路径可以表示为词 $A_1A_2\cdots A_n$（其中 $A_i=E,W,N$），为满足条件 3)词不能出现 EW 和 WE，则长度为n 且以 N、EE、WW、NE 结尾的词均有$f(n-1)$个，长度为n 且以 NW 结尾的词均有$f(n-2)$个.对于任意长度大于 2 的词，其结尾必为 N、EE、WW、NE、NW。因此，有

$$f(n)=2f(n-1)+f(n-2), f(0)=1, f(1)=3$$

从而有 $\sum_{n\geq 0} f(n)x^n=\frac{1+x}{1-2x-x^2}$，又 $1-2x-x^2=(1-(1+\sqrt{2})x)(1-(1-\sqrt{2})x)$。故有

$f(n)=a(1+\sqrt{2})^n+b(1-\sqrt{2})^n$，取$n=0,1$ 解得 $a=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$， $b=\frac{1}{2}(1-\sqrt{2})$ 。

因此，

$$f(n)=\frac{1}{2}((1+\sqrt{2})^{n+1}+b(1-\sqrt{2})^{n+1})$$