组合论期末复习试卷 1 答案

一 、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．将一个 5 元集做 3 分划的方法数等于____B____.

(A) 将 5 个不同的球放入 3 个不同的盒子，允许有空盒的方案数；

(B) 将 5 个不同的球放入 3 个相同的盒子，不允许有空盒的方案数；

(C) 将 3 个不同的球放入 5 个不同的盒子，不允许有空盒的方案数；

(D) 将 5 个不同的球放入 3 个相同的盒子，允许有空盒的方案数.

2．设 n 为正整数，则 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}3^k$ 的值是____C____.

(A) 2^n；　(B) -2^n；　(C) $(-2)^n$；　(D) 0.

3．设 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 和 $\{b_n\}_{n\geq 0}$ 是两个数列，s 是非负整数。若对于任意 $s\leq n$，有 $a_n=\sum_{k=s}^{n}\binom{n}{k}b_k$，

则对于任意 $s\leq n$，有 $b_n=$____B____.

(A) $\sum_{k=s}^{n}\binom{n}{k}a_k$；　(B) $\sum_{k=s}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}a_k$；　(C) $\sum_{k=s}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}a_k$；　(D) $\sum_{k=s}^{n}(-1)^{n-k}k\binom{n}{k}a_k$.

4．在下面序列中，以 e^{-x} 为普通型生成函数的是__A__，以 e^{-x} 为指数型生成函数的是____D____.

(A) $1,-\frac{1}{1!},\frac{1}{2!},\cdots,(-1)^n\frac{1}{n!},\cdots$；　(B) $1,\frac{1}{1!},\frac{1}{2!},\cdots,\frac{1}{n!},\cdots$；

（C）$1,1,1,\cdots,1,\cdots$；　(D) $1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots$

5．用 1,2,3,4,5 这五个数字能组成每位上的数字互不相同的 4 位偶数的个数为（C）.

(A) 12；　(B) 24；　(C) 48；　(D) 96.

二 、证明题（第 1 小题 8 分，其他每小题 10 分，共 38 分）

1（8 分）．证明：正整数 n 的有序 k 分拆的个数为 $\binom{n-1}{k-1}$.

证明：正整数 n 分成 k 个分部量的一个有序分拆 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$ 等价于

方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ 的正整数解 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$.

即等价于方程 $y_1+y_2+\cdots+y_k=n-k$ 的非负整数解，其中 $y_i=x_i-1\ (i=1,2,\cdots,k)$.

也等价于集合 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_k\}$ 中 $a_i\ (1\leq i\leq k)$ 至少出现一次的 n 组合数.

因此，所求的分拆个数为 $\binom{(n-k)+k-1}{n-k}=\binom{n-1}{n-k}=\binom{n-1}{k-1}$.

或：正整数n的有序k分拆的个数为在$n-1$空隙中插入$k-1$个竖线的方法数。

2（10 分）. 试用组合学推理证明下列恒等式：

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_k}=\binom{n-1}{n_1-1,n_2,\cdots,n_k}+\binom{n-1}{n_1,n_2-1,\cdots,n_k}+\cdots+\binom{n-1}{n_1,n_2,\cdots,n_k-1}.$$

证明：多重集合 $S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k\}$ 的排列数为 $\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_k}$.

对 S 的每一个排列，第一个位置的元素或者是 a_1，或者是 a_2，$\cdots$，或者是 a_k.

且当第一个位置的元素是 a_i （$i=1,2,\cdots,k$）时，余下的 $n-1$ 个位置上的排列是集合

$S=\{n_1\cdot a_1,\cdots,n_{i-1}\cdot a_{i-1},(n_i-1)\cdot a_i,n_{i+1}\cdot a_{i+1},\cdots,n_k\cdot a_k\}$ 的排列全体，其排列数为，

$\binom{n-1}{n_1,\cdots,n_{i-1},n_i-1,n_{i+1},\cdots,n_k}$. 因此，由加法原则可得，

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_k}=\binom{n-1}{n_1-1,n_2,\cdots,n_k}+\binom{n-1}{n_1,n_2-1,\cdots,n_k}+\cdots+\binom{n-1}{n_1,n_2,\cdots,n_k-1}.$$

3（10 分）. 利用容斥原理证明：对任意的正整数 n，集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 的全部错排个数 D_n 满足下列等式：

$$D_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$

证明：设 P_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 表示排列保持元素 i 不变，则由 n 个元素排列的总数为 $n!$ 可知， $N=n!$.

且 $N(P_i)$ 是保持元素 i 不变的排列数，因而除元素 i 外，其余 $n-1$ 个元素可以任意排放，

所以， $N(P_i)=(n-1)!$. 又 $N(P_iP_j)$ 是保持元素 i 和 j 不变的排列数，

因而其余 $n-2$ 个元素可以任意排放，所以， $N(P_iP_j)=(n-2)!$.

同理可得， $N(P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_m})=(n-m)!$. 且从 n 个元素中选择 m 个元素，共有 $\binom{n}{m}$ 种方法，

从而有 $\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_m\le n}N(P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_m})=\binom{n}{m}(n-m)!$. 因此，由容斥原理可得

$$D_n = N\left(\overline{P}_1\overline{P}_2\cdots\overline{P}_n\right) = N - \sum_{1\le i\le n}\left|N\left(P_i\right)\right| + \sum_{1\le i<j\le n}\left|N\left(P_i\right)N\left(P_j\right)\right| - \cdots + (-1)^n N\left(P_1P_2\cdots P_n\right)$$

$$= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)! = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$

4（10 分）．设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 $n\ \ (n\ge 2)$ 个正整数，

证明：必有整数 k 和 $l\ \ (0\le k<l\le n)$，使得 $x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_l$ 是 n 的倍数.

证明：令 $A=\left\{S_1, S_2, \cdots, S_n\right\}$，其中 $S_i = x_1+x_2+\cdots+x_i\ \ (1\le i\le n)$.

又令 $A_i=\left\{x \mid x\in A \text{ 且 } x \text{ 除以 } n \text{ 所得余数为 } i\right\}\ (i=0,1,2,\cdots,n-1)$，则有 $\bigcup_{i=0}^{n-1}A_i = A$.

若 $A_0\ne\varnothing$，则对某 $S_l\in A_0$，有 $n\mid S_l$，即存在 $S_l=x_1+x_2+\cdots+x_l$ 为 n 的倍数.

此时，取 $k=0$，则 $x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_l$ 是 n 的倍数．若 $A_0=\varnothing$，则 $\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i = A$.

但 $|A|=n$，因此由鸽巢原理可知，至少有一个类 A_j，使得 A_i 中至少含有两个整数 $S_k, S_l (1\le k<l\le n)$.

因此，必有 $n\mid\left(S_l-S_k\right)$，即 $a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_l$ 为 n 的倍数.

三 、回答题（第 1 小题 7 分，其他每小题 10 分，共 47 分）

1（7 分）．已知 $f(n)$ 是 n 的三次多项式，且 $f(0)=1, f(1)=1, f(2)=3, f(3)=19$. 用差分法确定 $f(n)$，

并求 $\sum_{k=0}^{n} f(k)$.

解：对序列 $\{f(n)\}_{n\ge 0}$，有 $\Delta^0 f(0)=f(0)=1, \Delta f(0)=0, \Delta^2 f(0)=2, \Delta^3 f(0)=12$.

且由 $f(n)$ 为 n 的三次多项式可知，当 $k\ge 4$ 时，$\Delta^k f(n)=0\ (n=0,1,2,\cdots)$， 于是，

$$f(n) = \mathrm{E}^n f(0) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\Delta^i f(0) = \sum_{i=0}^{3}\binom{n}{i}\Delta^i f(0) = f(0) + n\cdot\Delta f(0) + \binom{n}{2}\Delta^2 f(0) + \binom{n}{3}\Delta^3 f(0)$$

$$=1+2\cdot\binom{n}{2}+12\cdot\binom{n}{3} = 2n^3-5n^2+3n+1.$$ 且

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \sum_{j=0}^{3}\binom{n+1}{j+1}\Delta^j f(0) = n+1+2\cdot\binom{n+1}{3}+12\cdot\binom{n+1}{4}$$

$$=\frac{(n+1)\left(3n^3-7n^2+4n+6\right)}{6}=\frac{1}{2}n^4-\frac{2}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{5}{3}n+1.$$

2（10 分）．设 $R(n,m)$ 为把 n 件相异物分给 m 个人，使得没有人恰分得一件物件的不同方法数，

求 $R(n,m)$ 的计数公式

解：设 $G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}R(n,m)\frac{x^n}{n!}$，则有 $G_e(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^m=\left(e^x-x\right)^m=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}x^k e^{(m-k)x}$

即，$G_e(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\sum_{j=0}^{\infty}(m-k)^j\frac{x^{k+j}}{j!}$．　若令 $k+j=n$，则有 $j=n-k$，所以

$$G_e(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\sum_{n-k=0}^{\infty}(m-k)^{n-k}\frac{x^n}{(n-k)!}=\sum_{n=k}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{(m-k)^{n-k}n!}{(n-k)!}\right\}\frac{x^n}{n!}.$$

故，$R(n,m)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{(m-k)^{n-k}n!}{(n-k)!}=n!\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{(m-k)^{n-k}}{(n-k)!}$.

或：$k\ (0\le k\le m)$ 个人各获得 1 件物品的方法数为 $\binom{n}{k}k!(m-k)^{n-k}$，共有 $\binom{m}{k}$ 种，

再利用容斥原理可得 $R(n,m)$ 的计数公式.

3（10 分）．求数列 $\{f_{3n}\}$ 的普通型生成函数 $G_{3n}(x)$．其中，$\{f_n\}$ 为 Fibonacci 数列.

解：由 Fibonacci 数列的性质，可知

$$f_0=0,\ f_1=f_2=1,\ f_{n+2}=f_n+f_{n+1},\ f_{n+3}=f_n+2f_{n+1},\ f_{n+4}=2f_n+3f_{n+1},\ f_{n+5}=3f_n+5f_{n+1},$$

$$f_{n+6}=5f_n+8f_{n+1}=f_n+4\left(f_n+2f_{n+1}\right)=f_n+4f_{n+3}.$$ 即，$f_{3(k+2)}=f_{3k}+4f_{3(k+1)}$.

令 $G_{3n}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n$，其中 $F_n=f_{3n}$．此时，$F_0=f_0=0,\ F_1=f_3=2,$ 且 $F_{n+2}=F_n+4F_{n+1}$，则有

$$G_{3n}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}F_nx^n=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}F_nx^{n-1}=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}F_{n+1}x^n=x\left(F_1+\sum_{n=1}^{\infty}F_{n+1}x^n\right)=x\left(2+x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}F_{n+1}x^{n-1}\right)$$

$$=2x+x^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}F_{n+2}x^n\qquad=2x+x^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(F_n+4F_{n+1}\right)x^n\qquad=2x+x^2G_{3n}(x)+4x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}F_{n+1}x^{n+1}$$

$$=2x+x^2G_{3n}(x)+4x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n=2x+x^2G_{3n}(x)+4xG_{3n}(x)\ .$$

由此可得，$G_{3n}(x)-4xG_{3n}(x)-x^2G_{3n}(x)=2x$． 从而，$G_{3n}(x)=\dfrac{2x}{1-4x-x^2}$．

4（10 分）．等式 $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{1+k+m}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{1+k+n}\binom{m}{k}$ 是否成立？若成立，给出其证明．

解：成立．事实上，由 $\dfrac{1}{1+k+m}=\int_0^1x^{k+m}dx$ 可知，

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{1+k+m}\binom{n}{k}=\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{k+m}dx=\int_0^1x^m\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^kdx=\int_0^1x^m(1-x)^ndx$$

同理，有 $$\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{1+k+n}\binom{m}{k}=\int_0^1\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}x^{k+n}dx=\int_0^1x^n\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}x^kdx=\int_0^1x^n(1-x)^mdx$$

用 $x=1-y$ 替换变量可得

$$\int_0^1x^m(1-x)^ndx=\int_1^0(1-y)^my^nd(1-y)=-\int_1^0(1-y)^my^ndy=\int_0^1(1-y)^my^ndy=\int_0^1x^n(1-x)^mdx$$

于是，$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{1+k+m}\binom{n}{k}=\int_0^1x^m(1-x)^ndx=\int_0^1x^n(1-x)^mdx=\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{1+k+n}\binom{m}{k}\ .$$

5（10 分）．用红和黄两种颜色为$1\times n$棋盘的每一个方格进行着色．令h_n是使得没有两个被涂成红色的方格相邻的着色方法数, 求h_n所满足的递推关系，并求h_n的显式公式．

解：若第一格涂红色，则由题意，第二格涂黄色，余下$n-2$个格的涂色方式数为h_{n-2}；

若第一格涂黄色，则由题意，余下$n-1$个格的涂色方式数为h_{n-1}．因此，由加法原则可得，$h_n=h_{n-1}+h_{n-2}$．

又当$n=1$时，$h_1=2$；当$n=2$时，$h_2=3$．因此，可定义$h_0=1$．于是，所求递推关系为$\begin{cases}h_n=h_{n-1}+h_{n-2},\\ h_0=1,\ h_1=2.\end{cases}$

又由特征方程$r^2-r-1=0$的根为$r_1=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$，$r_2=\dfrac{1-\sqrt5}{2}$可知，$h_n=\alpha_1\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^n+\alpha_2\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$

因此，由$h_0=1,\ h_1=2$可知，$\begin{cases}h_0=\alpha_1+\alpha_2=1,\\ h_1=\alpha_1\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)+\alpha_2\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)=2,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{1}{\sqrt5}\left(\dfrac{\sqrt5+3}{2}\right),\\ \alpha_2=\dfrac{1}{\sqrt5}\left(\dfrac{\sqrt5-3}{2}\right)\end{cases}$

于是，$h_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$\left\{\text{或：} h_n=\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \text{或：} h_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right\}$