数理科学与大数据本科生2020-2021学年第二学期

"数学分析II"第1次月考试题

一、(本题15分) 计算定积分$I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

二、(本题30分)

(1) 求曲线$y^2=2x+1$与直线$y=x-1$所围成图形的面积.

(2) 求圆盘$x^2+(y-b)^2\leqslant a^2\ (0<a<b)$绕$x$轴旋转一周得到的旋转体的体积.

三、(本题15分) 设$f(x)=\displaystyle\int_{1}^{x^2}\sin t^2\mathrm{d}t$. 求$\displaystyle\int_{0}^{1}xf(x)\mathrm{d}x$.

四、(本题15分) 设函数$f(x)$在$[0,1]$上非负连续，且存在正实数A和B, 使得

$$f(x)\leqslant A+B\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t,\ \forall x\in[0,1].$$

证明：$f(x)\leqslant A\mathrm{e}^{Bx}$, $\forall x\in[0,1]$.

五、(本题15分) 设函数$f(x)$在$[0,2\pi]$上连续. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{2\pi}f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x.$$

六、(本题10分) 设函数$f(x)$在$[-1,1]$上两次连续可微且$f(0)=0$. 证明：存在$\xi\in[-1,1]$, 使得

$$f''(\xi)=3\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x.$$

数理科学与大数据本科生2020-2021学年第二学期

“数学分析II”第2次月考试题

一、(本题15分) 设$f(X)$是$\mathbb{R}^n$中有界闭集D上的连续函数. 用“紧性”证明$f(X)$在D上有界.

二、(本题30分) 判断下列极限是否存在, 如果存在并求其值.

1. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.
2. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right)^{x+y}$.

三、(本题15分) 设$f(x,y)$在圆周$\Gamma=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|x^2+y^2=r^2\right\}$上连续. 证明：存在以$(x_1,y_1)$, (x_2,y_2)为端点的L的直径且$f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$.

四、(本题15分) 设$f(x,y)$在(x_0,y_0)的一个邻域内所有偏导数存在且其中一个偏导数在(x_0,y_0)连续. 证明：$f(x,y)$在(x_0,y_0)可微.

五、(本题15分) 设$z=f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$可微，存在$a\neq 0$, $b\neq 0$使得$b\dfrac{\partial z}{\partial x}=a\dfrac{\partial z}{\partial y}$. 证明：存在$g(t)$使得$z=g(ax+by)$.

六、(本题10分) 设$f(x,y)$定义在$\mathbb{R}^2$上，分别对x与y一元连续，且$f(x,y)$把紧集映为紧集. 证明：$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上作为二元函数连续.

数理科学与大数据本科生2020-2021学年第二学期

“数学分析II”第3次月考试题

一、(本题15分) 写出函数$f(x,y)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\cos y}$在$(0,0)$点邻近的二阶泰勒展开式.

二、(本题30分) 求下列方向导数和偏导数.

1. 设$f(x,y)=\ln(\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^y)$, $\vec{l}=(\cos\theta,\sin\theta)$, 其中$\theta\in[0,2\pi)$, 求$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0,0)$.
2. 设z为由方程$z^3-xz-y=0$确定的x, y的隐函数，求z''_{xy}.

三、(本题15分) 在曲线$x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=\mathrm{e}^t$上求一点，使得该曲线在此点的切线平行于平面$\sqrt{3}x+y-4=0$.

四、(本题15分) 求函数$f(x,y,z)=xyz$在条件$x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$下的极值.

五、(本题15分) 设n元函数$f(X)$在$X_0\in\mathbb{R}^n$的一个邻域内所有二阶偏导数都连续, 且$\nabla f(X_0)=0$, $f(X)$在X_0的黑塞矩阵$H_f(X_0)$为正定矩阵. 证明：存在$\delta>0$和$\lambda>0$, 使得当$\Delta X\in\mathbb{R}^n$且$0<|\Delta X|<\delta$时，就有$f(X_0+\Delta X)-f(X_0)>\lambda|\Delta X|^2$.

六、(本题10分) 设D是$\mathbb{R}^n$中的凸开区域，$F:D\to\mathbb{R}^n$是可微映射，对任意$X\in D$, 雅可比矩阵$J_F(X)$都是正定矩阵，证明：F是单射.

数理科学与大数据本科生2020-2021学年第二学期

“数学分析II”期末考试试卷（A卷）试题

一、(本题15分) 设$u(x,y)=x\ln(x+r)-r$, 其中$r=\sqrt{x^2+y^2}$. 求证：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{x+r}.$$

二、(本题30分，每小题15分) 计算下列各题.

(1) 判断极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$是否存在, 如果存在并求其值.

(2) 设函数$f(x)$在$[0,1]$连续，求极限$\lim\limits_{x\to 0^+} x\displaystyle\int_x^{\sqrt{x}}\frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

三、(本题15分) 设$f(x)\in C^2([0,\pi])$, 且$f(0)=3$. 已知$\displaystyle\int_0^\pi [f(x)+f''(x)]\sin x\,\mathrm{d}x=10$, 求$f(\pi)$.

四、(本题15分) 求球体$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$被圆柱面$x^2+y^2=ax$ $(a>0)$所割下部分立体的体积.

五、(本题15分，第一问5分，第二问10分)

(1) 隐函数存在定理可以保证在哪些点的邻域内，由方程

$$2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$$

可唯一地确定隐函数$z=z(x,y)$?

(2) 求隐函数$z=z(x,y)$的极值.

六、(本题10分) 设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$为二阶连续可微函数，对任意$X\in\mathbb{R}^n$, $H_f(X)-I_n$都是半正定对称矩阵，其中$H_f(X)$是f在X的黑塞矩阵，I_n是n阶单位矩阵. 证明：$f(X)$在$\mathbb{R}^n$上有最小值.

数理科学与大数据本科生2021-2022学年第二学期

“数学分析II”期中考试试题

一、(本题10分) 判断极限$\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2}$是否存在，如果存在并求其值.

二、(本题15分) 设$f(x,y)=\ln\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y\right)$, 求全微分$\mathrm{d}f(0,0)$和二阶全微分$\mathrm{d}^2f(0,0)$.

三、(本题15分) 求旋轮线$x=\sqrt{3}(t-\sin t)$, $y=\sqrt{3}(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$绕$x$轴旋转所得曲面的面积.

四、(本题15分) 计算定积分$\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x\arcsin x+\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

五、(本题15分) 设$f(x)$在$[a,b]$连续，$D=\big\{(x,y)\big|x\in[a,b],y\in\mathbb{R}\big\}$, 令

$$g(x,y)=f(x)\sin y,\quad (x,y)\in D.$$

证明：$g(x,y)$在D上一致连续.

六、(本题15分) 设$f(x)$在$[0,1]$连续. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0).$$

七、(本题10分) 设$f(x)$在$[0,1]$连续可微, 且$\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 记$M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|$. 证明：对任意$x\in[0,1]$, 都有

$$\left|\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{M}{8}.$$

数理科学与大数据本科生2021-2022学年第二学期

“数学分析II”期末考试试卷（A卷）试题

一、(本题15分) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续可微，$u(x,y)=f(x^2+y^2)$. 证明：

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

二、(本题15分) 求积分$\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^3}\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$.

三、(本题15分) 设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 证明：$f(x,y)$在原点$(0,0)$处连续且两个偏导数都存在，但$f(x,y)$在$(0,0)$点不可微.

四、(本题15分) 计算三重积分

$$\iiint_V z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中V: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,\\ x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2,\end{cases}\quad a>0.$

五、(本题15分) 求函数$f(x,y,z)=xyz$在条件$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a}$ $(x>0,\ y>0,\ z>0,\ a>0)$下的极值.

六、(本题15分) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且$g(x)=f(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减. 证明：$f(x)\equiv 0$.

七、(本题10分，每问5分) 设$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2<1\right\}$, $f(x,y)$是D上两次连续可微的有界正值函数，且对任意$(x,y)\in D$, 都有

$$\Delta\ln f(x,y)\geqslant f^2(x,y),$$

其中$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$是$\mathbb{R}^2$中的拉普拉斯算子. 令$g(x,y)=\dfrac{2}{1-x^2-y^2}$.

(1) 证明：对任意$(x,y)\in D$, 都有

$$\Delta\left[\ln g(x,y)-\ln f(x,y)\right]\leqslant g^2(x,y)-f^2(x,y).$$

(2) 证明：对任意$(x,y)\in D$, 都有$f(x,y)\leqslant g(x,y)$.

数理科学与大数据本科生2022-2023学年第二学期

"数学分析II"第1次月考试题

一、(本题15分) 设曲线Γ的极坐标方程是$r = \min\left\{2\sin\theta, 2\sqrt{3}\cos\theta\right\}$ $\left(0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$, 求曲线$\Gamma$所围成的图形的面积.

二、(本题15分) 求$y = \sqrt{x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$绕直线$y = x$旋转一周所得的旋转体的体积.

三、(本题15分) 设函数$f(x)$在$[a,b]$上非负连续，令$\varphi(x) = \displaystyle\int_a^b |x-t|\, f(t)\mathrm{d}t$, $x \in [a,b]$. 证明：$\varphi(x)$在$[a,b]$下凸.

四、(本题15分) 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续且满足$0 \leqslant f(x) \leqslant x$, $x \in [0,1]$. 证明：

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

五、(本题15分) 设$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right), & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 证明：$f(x)$在$[0,1]$可积.

六、(本题15分) 设函数$f(x)$在$[-1,1]$上连续. 证明:

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{1}{2\lambda} \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\lambda}}\mathrm{d}x = f(0).$$

七、(本题10分) 设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导, $f(0) = 1$, 对任意$x \geqslant 0$, 有$f'(x) \geqslant \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 证明：对任意$x \geqslant 0$, 有$\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant x$.

数理科学与大数据本科生2022-2023学年第二学期

“数学分析II”第2次月考试题

一、(本题15分) 判断极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(x+\cos y)}{x+y}$是否存在，如果存在并求其值.

二、(本题15分) 求函数$f(x,y,z)=x^{yz}$在点$(\mathrm{e},1,2)$处的全微分.

三、(本题15分) 设D是$\mathbb{R}^n$中的有界集，对任意柯西列$\{X_m\}\subseteq D$, 极限$\lim\limits_{m\to\infty} X_m$都在$D$中. 证明：$D$是紧集.

四、(本题15分) 设$f(X)$是$\mathbb{R}^n$上的连续函数，$\lim\limits_{|X|\to+\infty} f(X)$存在. 证明：$f(X)$在$\mathbb{R}^n$上有界.

五、(本题15分) 设$D\subseteq\mathbb{R}^2$, 函数$u(x,y)$和$v(x,y)$都在D上一致连续，记$\Omega=\Big\{(u,v)\Big|u=u(x,y),v=v(x,y)$

又设函数$f(u,v)$在Ω上一致连续. 证明：复合函数$f(u(x,y),v(x,y))$在D上一致连续.

六、(本题15分) 设$f(X)$是$\mathbb{R}^n$上所有偏导数处处都存在的函数，对任意$X\in\mathbb{R}^n$, 都有$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X)\right|\leqslant 1$, $i=1,2,\cdots,n$. 证明：对任意$X,Y\in\mathbb{R}^n$, 有

$$|f(X)-f(Y)|\leqslant\sqrt{n}|X-Y|.$$

七、(本题10分) 设$\delta>0$, $D=\Big\{(x,y)\Big||x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta\Big\}$, $f(x,y)$是D上的函数，对于任意$y\in(y_0-\delta,y_0)\cup(y_0,y_0+\delta)$, 有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y)$, 对于任给的$\varepsilon>0$, 存在$\eta\in(0,\delta)$, 使得当$0<|y-y_0|<\eta$时，对任意$x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$, 都有$|f(x,y)-\psi(x)|<\varepsilon$. 证明：两个累次极限存在且相等，即

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

数理科学与大数据本科生2022-2023学年第二学期

“数学分析II”第3次月考试题

一、(本题15分) 设$u = -\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, 试问在空间哪些点成立$|\nabla u| = 1$.

二、(本题15分) 写出函数$f(x,y) = \sin x \sin y$在点$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$处的二阶泰勒展开式.

三、(本题15分) 设D是$\mathbb{R}^2$中的有界闭区域，$f(x,y)$在D上连续，在D°内两次连续可微，对任意$(x,y) \in D^\circ$, 有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \neq 0.$$

证明：$f(x,y)$在D上的最大值和最小值只能在D的边界上取得.

四、(本题15分) 求曲面$S\colon z = x^2 + 4y^2$上的点P, 使得曲面S在点P处的切平面经过点(5,2,1)且与直线$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$平行.

五、(本题15分) 动点P在椭球面$2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$上，函数$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$，方向$\vec{\tau} = (1,-1,0)$，求使得方向导数$\frac{\partial f}{\partial \vec{\tau}}(P)$最大的点$P$的坐标.

六、(本题15分，第一问5分，第二问10分) 设(x_0,y_0,z_0)满足方程组$\begin{cases} y = f(x,z), \\ g(x,y,z) = 0, \end{cases}$ $f(x,z)$在(x_0,z_0)的某邻域内连续可微，$g(x,y,z)$在(x_0,y_0,z_0)的某邻域内连续可微.

(1) 应用隐函数存在定理，在什么条件下，方程组$\begin{cases} y = f(x,z), \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 在(x_0,y_0,z_0)的某邻域内可唯一地确定y, z为x的隐函数$y = y(x)$, $z = z(x)$?

(2) 设(1)的条件成立，求$y'(x)$.

七、(本题10分) 设$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上连续可微，$f(0,0)=0$, 对任意$(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 有

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\leqslant|x-y|\text{且}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\leqslant|x-y|.$$

证明：对任意$(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 有

$$|f(x,y)|\leqslant\frac{1}{2}(x-y)^2.$$

数理科学与大数据本科生2022-2023学年第二学期

“数学分析II”期末考试试卷（A卷）试题

一、(本题15分) 求积分$\int_1^{\mathrm{e}} (x\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.

二、(本题15分) 设$D=\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^2 \middle| t>0\right\}$, 常数$a>0$, $u(x,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$, $(x,t)\in D$. 证明：函数$u(x,t)$满足方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$$

.

三、(本题15分) 设V是由$x^2+y^2+z^2\leqslant 4$和$x^2+y^2\leqslant 3z$所确定的立体，求V的体积.

四、(本题15分) 设$\delta>0$, $\varphi(x)$是$[0,\delta)$上的函数，对任意$x\in[0,\delta)$, 有$|\varphi(x)|\leqslant x^2$, $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| -\delta<xy<\delta\right\}$, 令$f(x,y)=\varphi(|xy|)$, $(x,y)\in D$. 证明：$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微.

五、(本题15分，第一问10分，第二问5分)

(1) 求函数$f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$在条件$x^2+y^2+z^2=6r^2$ ($x>0$, $y>0$, $z>0$, $r>0$)下的极值.

(2) 证明：对任意正实数a, b, c, 有$ab^2c^3\leqslant 108\left(\dfrac{a+b+c}{6}\right)^6$.

六、(本题15分) 设$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且$g(x)$不是常数函数，令$f(x,y)=g(xy)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. 证明：$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上不一致连续.

七、(本题10分) 设$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上可微，对任意$(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 有$3f'_x(x,y)+4f'_y(x,y)=0$, 且$f(x,0)>0$对任意$x\in\mathbb{R}$都成立. 证明：$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上恒大于0.

数理科学与大数据本科生2023-2024学年第二学期

“数学分析II”第1次月考试题

一、(本题15分) 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_0^{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x}}$.

二、(本题15分) 求曲线$x=\mathrm{e}^t\sin t,\ y=\mathrm{e}^t\cos t,\ 0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$绕$x$轴旋转一周所得曲面的面积.

三、(本题15分) 求积分$\int_{-1}^{1}(x+1)(3x-1)\ln\dfrac{2+x}{2-x}\ \mathrm{d}x$.

四、(本题15分) 设函数$f(x)$在$[a,b]$可积，$G(x)$在$[a,b]$可导，对任意$x\in[a,b]$, 有$f(x)\leqslant G'(x)$. 证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant G(b)-G(a).$$

五、(本题15分) 设$\delta>0$, 函数$f(x)$在$[0,\delta)$连续可导，$f'(0)\neq 0$. 由积分第一中值定理知，对任意$x\in(0,\delta)$, 存在$\xi_x\in[0,x]$, 使得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=f(\xi_x)\cdot x.$$

证明：$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\xi_x}{x}=\dfrac{1}{2}$.

六、(本题15分) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n\int_0^1\dfrac{x^n}{x^n+1}\ \mathrm{d}x=\ln 2$.

七、(本题10分) 设函数$f(x)$在$[0,1]$连续可导，$f(0)=1$, 对任意$x\in[0,1]$, 有$|f'(x)|\leqslant 1$. 证明：

$$\left|\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

数理科学与大数据本科生2023-2024学年第二学期

“数学分析II”第2次月考试题

一、(本题共15分) 判断极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 是否存在. 若判断存在, 则求其极限值；若判断不存在，则给出证明.

二、(本题共15分，其中第1问8分，第2问7分) 设 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 某邻域连续，$\varphi(0,0)=0$，令 $f(x,y)=|x-y|\,\varphi(x,y)$.

(1) 证明： $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处两个偏导数存在.

(2) 问 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否可微? 证明你的结论.

三、(本题共15分) 设函数 $u=f(x,y)$ 和 $v=g(x,y)$ 二次可微, 且满足

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial g}{\partial x}.$$

设 $w=w(u,v)$ 满足$\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$. 证明：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0.$$

四、(本题共15分) 设函数 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$上有定义, 且对任意 $x_0\in[0,1]$, 函数 $f(x,y)$ 在 $(x_0,0)$连续. 证明：存在 $\delta>0$, 使函数 $f(x,y)$在 $[0,1]\times[0,\delta]$有界.

五、(本题共15分) 设 $D=\big\{(x,y)\,\big|\,a<x<b,\ c<y<d\big\}$, 函数 $f(x,y)$ 在 D 上偏导数 f'_x 和 f'_y 都存在且有界. 证明函数 $f(x,y)$ 在 D 上一致连续. 若 D 是任意区域, 结论是否仍旧成立?

六、(本题共15分) 设 $f(x,y,z)$ 是 $[a,b]\times[a,b]\times[a,b]$ 上的连续函数. 令

$$\varphi(x,y)=\min_{a\leqslant z\leqslant b} f(x,y,z).$$

证明： $\varphi(x,\, y)$ 在 $[a,\, b] \times [a,\, b]$ 连续.

七、(本题共10分) 设 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 是有界闭集, $f_m(X)$ 是 D 上连续函数, $m = 1, 2, \cdots$, 满足对任意 $X \in D$, $\{f_m(X)\}_{m \geqslant 1}$ 递减趋于 0. 证明： $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{X\in D} f_m(X) = 0$.

数理科学与大数据本科生2023-2024学年第二学期

“数学分析II”第3次月考试题

一、(本题共15分) 设曲线$\Gamma = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| y^2 - x^3 - 1 = 0\right\}$, $P=(2,3)$是曲线Γ上的一个点. 求曲线Γ在点P处的切线.

二、(本题共15分) 计算$f(x,y)=y^3+x^2y-2y$在点$(1,1)$的二阶泰勒展开式.

三、(本题共15分) 设$f(x,y,z)$是$\mathbb{R}^3$上的可微函数，$\vec{l}_1=(2,0,25)$, $\vec{l}_2=(0,0,5)$, $\vec{l}_3=(0,2,5)$是$\mathbb{R}^3$中的三个向量，方向导数$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}_i}(x,y,z)$, $i=1,2,3$都在$\mathbb{R}^3$上恒为零. 证明：偏导数$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$和$\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$都在$\mathbb{R}^3$上恒为零.

四、(本题共15分) 求函数$f(x,y,z)=2x+y-3z$在条件$x^2+y^2+9z^2=1$下的极值.

五、(本题共15分) 设函数$p(x,y)$二阶连续可微，在$\dfrac{\partial p}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$且$p(x_0,y_0)=0$的点$(x_0,y_0)$的邻域内，方程$p(x,y)=0$可以唯一确定函数$y=y(x)$.

证明：

$$y''(x)=\left(\frac{\partial p}{\partial y}(x,y(x))\right)^{-3}\cdot\det\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,y(x)) & \frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}(x,y(x)) & \frac{\partial p}{\partial x}(x,y(x))\\ \frac{\partial^2 p}{\partial y\partial x}(x,y(x)) & \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(x,y(x)) & \frac{\partial p}{\partial y}(x,y(x))\\ \frac{\partial p}{\partial x}(x,y(x)) & \frac{\partial p}{\partial y}(x,y(x)) & 0\end{pmatrix}.$$

六、(本题共15分，其中第1问12分，第2问3分) 考虑$\mathbb{R}^2$中的单位圆盘$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| x^2+y^2\leqslant 1\right\}$，设$f(x,y)$是$D$上的连续函数并且$f(x,y)$在$D$的内部$D^\circ$上二阶连续可微，对任意$(x,y)\in D^\circ$，恒有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\geqslant 0.$$

(1) 任意固定常数$\varepsilon>0$, 令$f_\varepsilon(x,y)=f(x,y)+\varepsilon x^2$. 证明：$f_\varepsilon(x,y)$满足

$$\frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial y^2}(x,y)>0,\quad \forall\,(x,y)\in D^\circ,$$

且$f_\varepsilon(x,y)$的最大值只能在D的边界上取得.

(2) 证明：$f(x,y)$的最大值一定可以在D的边界上取得，即

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = \max_{(x,y)\in\partial D} f(x,y).$$

七、(本题共10分) 考虑$\mathbb{R}^n$中的单位开球$B(0,1) = \big\{X \in \mathbb{R}^n \big| |X| < 1\big\}$. 设映射$F : B(0,1) \to \mathbb{R}^n$连续可微，雅可比矩阵$J_F(X)$处处非奇异，并满足

$$\lim_{|X|\to 1} |F(X)| = +\infty.$$

证明：映射F是满射，即对任意$Y \in \mathbb{R}^n$，存在$X \in B(0,1)$, 使得$F(X) = Y$.

数理科学与大数据本科生2023-2024学年第二学期

“数学分析II”期末考试试卷（A卷）试题

一、(本题共15分) 计算二重积分

$$\iint_D \frac{xy+1}{x^2+y^2+3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|x^2+y^2\leqslant 1,\ y\geqslant 0\right\}$.

二、(本题共15分) 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

证明：函数$f(x,y)$在原点$(0,0)$处连续，偏导数$f'_x(x,y)$和$f'_y(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上处处存在且有界，但$f(x,y)$在$(0,0)$点不可微.

三、(本题共15分) 求曲面$(x^2+y^2+z^2)^3=a^2z^4$所围区域的体积，其中$a>0$为常数.

四、(本题共15分) 设函数$f(u,v)$在$\mathbb{R}^2$上二次连续可微，且$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$. 令$g(x,y)=f\left(xy,\dfrac{x^2-y^2}{2}\right)$. 证明：

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2+y^2.$$

五、(本题共15分) 求函数$f(x,y)=xy$在闭区域

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|x+y\leqslant 3,\ x^2+y^2\leqslant 8\right\}$$

上的最大值和最小值.

六、(本题共15分) 设$0<a<b$, 函数$f(x)$在$[a,b]$连续，$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$. 证明：对任意正实数$p$,

存在$\xi \in (a,b)$, 使得

$$\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x = p\xi f(\xi).$$

七、(本题共10分，其中第一问7分，第二问3分) 设函数$f(x,t)$在$[0,1]\times[0,1]$上二次连续可微，对任意$(x,t)\in[0,1]\times[0,1]$, 有$\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$和$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant 1$.

(1) 证明：对任意$x,y,t_1,t_2\in[0,1]$, 有

$$\left|\int_x^y f(u,t_1)\mathrm{d}u - \int_x^y f(u,t_2)\mathrm{d}u\right| \leqslant 2\left|t_1-t_2\right|.$$

(2) 对任意$x,t_1,t_2\in[0,1]$, 有

$$\left|f(x,t_1)-f(x,t_2)\right| \leqslant 5\left|t_1-t_2\right|^{\frac{1}{2}}.$$