黎曼几何与几何分析基础期末测试(2025.5,时间:100分钟)

一.(20)写出黎曼流形的定义,并举出一个例子.

二.(20)写出黎曼流形间等距同构的定义,并证明等距同构保持联络,即若$\phi: M \to M$是等距同构,则

$$\nabla_{\phi_* X} \phi_* Y = \phi_* \left(\nabla_X Y\right)$$

三.(15)设f是光滑函数,证明:

$$\frac{1}{2}\Delta \left|\nabla f\right|^2 = \langle \nabla \Delta f, \nabla f\rangle + \left|\nabla^2 f\right|^2 + \mathrm{Ric}\left(\nabla f, \nabla f\right)$$

四.(10)证明:$S^2 \times S^2 \times T^2$上不存在负截面曲率度量.

五.(10)证明:可定向闭流形(M^n, g)上的体积形式Ω是调和n-形式.

六.(25)考虑$\mathbb{H} \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$及度量$g = \dfrac{1}{y^2}\left(dx^2 + dy^2\right)$.

1).写出测地线的定义;

2).写出$(\mathbb{H}, g)$上的测地线方程;

3).举出一个$(\mathbb{H}, g)$上的测地线例子;

4).$l: y = kx$是不是$(\mathbb{H}, g)$上的测地线?说明理由.