2024-2025 学年第二学期高等代数与解析几何
第二次月考

1、(15 分)

1）设 V 是数域 P 上的 3 维线性空间，ξ_1, ξ_2, ξ_3 是一组基。设 A 是 V 上的线性变换。

$$A(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

求 A 在基 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\xi_1 + \xi_2, \xi_2, -\xi_3)$ 下的矩阵。

2）设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

2、(15 分) 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 上的线性变换，$\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性变换。定义 Cartesian 积 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$: $\mathrm{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$ 满足

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}x \\ \mathcal{B}y \end{pmatrix}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n.$$

证明：1) $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ 是线性变换；2) 若 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ 可对角化，则 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 都可对角化。

3、(15 分) 设 $F[x]$ 表示数域 F 上一元多项式的全体，$D : F[x] \to F[x]$ 是 $F[x]$ 上的线性变换，它满足下列条件：$\forall f, g \in F[x]$，

(1) $D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g)$,

(2) $Dx = 1$,

求证：$D(f) = f'$ 是 f 的微商。

4、(15 分) 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，线性子空间 $V = L(E, A, A^2, \ldots)$，其中 E 是 n 阶单位阵。证明：

(1) $\dim V \leq n$;

(2) 当 $\dim V = n - 1$ 时，A 存在特征值 $\lambda \in \mathbb{C}$，使得特征子空间 W_λ 满足 $\dim W_\lambda = 2$。

5、(15 分) 求下列矩阵的行列式因子、不变因子和 Jordan 标准形：

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

6、(15 分) 求 A^{100}，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

7、(10 分) 设 n 阶方阵 A 的特征值全是 1 或-1，证明 A 与 A^{-1} 相似。