泛函分析(省身班)试题

（南开大学2025年春）

1. 设 $T: L^1([a,b]) \to C([a,b])$ 定义为:
$$(Tf)(x) = \int_a^x f(s)\,ds.$$
证明 T 是有界算子并求出 T 的范数.

2. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间，若对任意 $x, y \in X$， $x \neq y$ 且 $\|x\| = \|y\| = 1$ 必有 $\|x+y\| < 2$, 则称 $(X, \|\cdot\|)$ 是一致凸空间. 证明 $(X, \|\cdot\|)$ 是一致凸空间当且仅当对任意 $x, y \in X$, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, 必有 $x = \alpha y$, $\alpha \geq 0$.

3. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间, $E \subseteq X$. 证明 E 有界当且仅当对任意 $x^* \in X^*$, $x^*(E)$ 有界.

4. 设 X 是自反 Banach 空间，$M \subseteq X$ 是闭子空间. 证明 X/M 也是自反 Banach 空间.

5. 设 H 是 Hilbert 空间，$\{x_n\} \subseteq H$，若 $\|x_n\| \to \|x_0\|$ 且 $x_n \rightharpoonup x_0$，证明 $x_n \to x_0$.

6. 设 X, Y 是 Banach 空间，$T: X \to Y$ 是线性算子，且满足对任意 $\{x_n\} \subseteq X$，$x_n \to 0$，$f \in Y^*$，有
$$f(Tx_n) \to 0.$$
证明 T 是连续的.

7. 设 X, Y 是赋范线性空间, $X \neq \{0\}$. 若 $B(X, Y)$ 是 Banach 空间, 证明 Y 也是 Banach 空间.

8. 设 X 是赋范线性空间，$x, y \in X$，证明存在 $f^* \in X^*$，使得 $\|f\| = 1$ 且
$$|f^*(x)| \geq \frac{1}{5}, \quad |f^*(y)| \geq \frac{1}{5}.$$