微分几何期末测试(2025.6,时间:100分钟)

注:关于曲线和曲面的描述未给出.总之性质足够好,可以进行任何你能想象的求导操作等.

一.(20)曲面S的第一,二基本形式满足I$= c(p)$II,证明:$c(p)$是常数,并且S是球面一部分;

二.(20)曲面S_1,S_2的第一基本形式分别为$\mathrm{I}_1=\dfrac{du^2+dv^2}{(1-(u^2+v^2))^2}$,$\mathrm{I}_2=\dfrac{du^2+dv^2}{4v^2}$.求$S_1,S_2$的Gauss曲率,并证明它们之间存在保长对应;

三.(10)求相对曲率$\kappa_r=\dfrac{1}{1+s^2}$($s$是弧长参数)的平面曲线的参数方程;

四.(20)求曲线$P(t)=(cosht,sinht,t)$的曲率和挠率;

五.(20)曲面S第一基本形式I$= Edu^2+Gdv^2$,u-曲线和v-曲线的测地曲率分别为常数a,b.证明S有常非正Gauss曲率;

六.(10)曲面S的平均曲率H是常数,相对曲率$\kappa_1>\kappa_2$.证明:存在正交参数网(u,v),使S的第一基本形式为I$= \lambda(du^2+dv^2)$,第二基本形式为II$= (1+\lambda H)du^2-(1-\lambda H)dv^2$,这里$\lambda=\dfrac{2}{\kappa_1-\kappa_2}$.