组合论期末复习试卷 2

一 、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．从 5 元集合中可重复的取 3 元子集的取法数为 (　　).
(A)　25；　　(B)　35；　　(C)　45；　　(D)　55．

2．把 n 个相同的球放入 k 个相同的盒子里，且每个盒中至少放 1 个球的方案数等于 (　　).
(A) n 元集的 k-组合数；　　(B) n 元集的 k-划分的个数；
(C) n 的有序 k 分拆的个数；　　(D) n 的 k 分拆的个数．

3．设 n, k 为正整数且 $n \geq k$，则有 $\binom{n}{k} =$ 　(　　).

(A) $\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k}$；　　(B) $\binom{n-2}{k} + \binom{n-1}{k}$；　　(C) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$；

(D) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2}$.

4．设 $f(n) = 2^n$，则 $\Delta^{50} f(0) =$ 　(　　).

(A)　1；　　(B)　2；　　(C)　4；　　(D)　8．

5. 设 a_n 为 n 元集合的所有子集的个数，则其生成函数为 　(　　).
(A) $\frac{1}{1+x}$;　　(B) $\frac{1}{1-x}$;　　(C) $\frac{1}{1+2x}$;　　(D) $\frac{1}{1-2x}$.

二 、证明题（第 1 小题 8 分，其他每小题 10 分，共 38 分）

1（8 分）．使用组合学推理证明第二类 Stirling 数 $S(n,k)$ 满足递推关系：
$S(n+1,k) = S(n,k-1) + kS(n,k), \quad (1 \leq k \leq n).$

2（10 分）．使用组合学推理证明恒等式：$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

3（10 分）．设 $g(n,m)$ 表示由 n 元集合 N 到 m 元集合 M 的满射的个数，利用二项式反演公式证明：

$g(n,m) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^n.$

4（10 分）．现从边长为 2 的正方形范围中任选 5 个点，证明：必存在 2 个点，其距离不超过 $\sqrt{2}$.

三 、解答题（第 1 小题 7 分，其他每小题 10 分，共 47 分）

1（7 分）．将 m 个正号和 n 个负号排成一条直线，求不存在两个负号相邻的排法数.

2（10 分）．求 $S=\{1,2,\ldots,9\}$ 的至少有一个奇数在它的自然位置上的排列数.

3（10 分）．求解常系数线性齐次递推关系：$h_n=h_{n-1}+9h_{n-2}-9h_{n-3}$，$h_0=0, h_1=1, h_2=2$.

4（10 分）．设序列 $\{h_n\}_{n\geq 0}$ 由 $h_n=2n^2-n+3$ 定义，计算其差分表，并求 $\sum_{k=0}^{n} h_k$.

5（10 分）．设 $f(n)$ 表示满足如下条件的格路径的个数：

1) 从 (0,0) 出发走 n 步； 2) 每步只能向右、左或上移动一个整数格点；

3) 自身不相交。

给出 $f(n)$ 满足的递推关系，并求 $f(n)$ 的显式公式.