组合论期末复习试卷 1

一 、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．将一个 5 元集做 3 分划的方法数等于______________.

(A) 将 5 个不同的球放入 3 个不同的盒子，允许有空盒的方案数；
(B) 将 5 个不同的球放入 3 个相同的盒子，不允许有空盒的方案数；
(C) 将 3 个不同的球放入 5 个不同的盒子，不允许有空盒的方案数；
(D) 将 5 个不同的球放入 3 个相同的盒子，允许有空盒的方案数.

2．设 n 为正整数，则 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}3^k$ 的值是______________.

(A) 2^n；　(B) -2^n；　(C) $(-2)^n$；　(D) 0.

3．设 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 和 $\{b_n\}_{n\geq 0}$ 是两个数列，s 是非负整数。若对于任意 $s\leq n$，有 $a_n=\sum_{k=s}^{n}\binom{n}{k}b_k$，则对于任意 $s\leq n$，有 $b_n=$______________.

(A) $\sum_{k=s}^{n}\binom{n}{k}a_k$；　(B) $\sum_{k=s}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}a_k$；

(C) $\sum_{k=s}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a_k$；　(D) $\sum_{k=s}^{n}(-1)^{n-k}k\binom{n}{k}a_k$.

4．在下面序列中，以 e^{-x} 为普通型生成函数的序列是________________，以 e^{-x} 为指数型生成函数的序列是_________________.

(A) $1,-\frac{1}{1!},\frac{1}{2!},\cdots,(-1)^n\frac{1}{n!},\cdots$；　(B) $1,\frac{1}{1!},\frac{1}{2!},\cdots,\frac{1}{n!},\cdots$；

(C) $1,1,1,\cdots,1,\cdots$；　(D) $1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots$.

5. 用 1,2,3,4,5 这五个数字能组成每位上的数字互不相同的 4 位偶数的个数为(　　).

(A) 12；　(B) 24；　(C) 48；　(D) 96.

二 、证明题（第 1 小题 8 分，其他每小题 10 分，共 38 分）

1（8 分）．证明：正整数 n 的有序 k 分拆的个数为 $\binom{n-1}{k-1}$.

2（10 分）．试用组合学推理证明下列恒等式：$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_k}=\binom{n-1}{n_1-1,n_2,\cdots,n_k}+\binom{n-1}{n_1,n_2-1,\cdots,n_k}+\cdots+\binom{n-1}{n_1,n_2,\cdots,n_k-1}$.

3（10 分）．利用容斥原理证明：对任意的正整数n，集合$S=\{1,2,\cdots,n\}$的全部错排个数D_n满足下列等式：$D_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$．

4（10 分）．设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是n $(n\ge 2)$个正整数，证明：必有整数k和l $(0\le k<l\le n)$，使得$x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_l$是$n$的倍数．

三 、回答题（第 1 小题 7 分，其他每小题 10 分，共 47 分）

1（7 分）．已知$f(n)$是n的三次多项式，且$f(0)=1, f(1)=1, f(2)=3, f(3)=19$．用差分法确定$f(n)$，并求$\sum_{k=0}^{n}f(k)$．

2（10 分）．设$R(n,m)$为把n件相异物分给m个人，使得没有人恰分得一件物件的不同方法数，求$R(n,m)$的计数公式．

3（10 分）．求数列$\{f_{3n}\}$的普通型生成函数$G_{3n}(x)$．其中，$\{f_n\}$为 Fibonacci 数列．

4（10 分）．等式 $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{1+k+m}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{1+k+n}\binom{m}{k}$ 是否成立？若成立，给出其证明．

5（10 分）．用红和黄两种颜色为$1\times n$棋盘的每一个方格进行着色．令h_n是使得没有两个被涂成红色的方格相邻的着色方法数, 求h_n所满足的递推关系，并求h_n的显式公式．