

2024-2025 秋季学期省身班数学分析 3 期末考试题

1. 求证积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{\sqrt{x}} dx$$

在 $t \in (0, +\infty)$ 内闭一致收敛, 但非一致收敛.

2. 计算

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx.$$

3. 计算 $e^x (-\pi < x \leq \pi)$ 的 Fourier 展开式, 并由此计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

4. 判断下列级数的收敛性和绝对收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p + (-1)^{n-1}} (p > 0)$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

5.

$$f(x) = x \cot(\pi x) \quad g(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{x+n}$$

(1) 证明 $g(x)$ 在 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ 连续且 $g(x)$ 周期为 1;

(2) 令 $h(x) = f(x) - g(x)$, 证明 $h(x)$ 可以延拓到整个 \mathbb{R} , 且 f 和 g 都满足函数方程

$$2w(x) = w\left(\frac{x}{2}\right) + w\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

(3) 证明 $h \equiv 0$.

6. 设 B 是单位闭圆盘. 已知

$$\Delta f = x^2 y^2$$

求

$$\int_B \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx dy.$$