2024-2025 年数学类实变函数期末考试

回忆：VoyageurInnocent

1. 设集合序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都有极限, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n \cup \lim\limits_{n\to\infty} B_n$.

2. 设 G_1, G_2 是开集, 证明：$m(G_1 \cup G_2) = m(G_1) + m(G_2)$ 当且仅当 $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.

3. (1) 叙述 Lusin 定理.

   (2) 设 f 是可测集 D 上的几乎处处有限的可测函数. 证明:存在 D 上的连续函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使对几乎处处的 $x \in D$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

4. 设 f, g 为 $\mathbb{R}$ 上有界可测函数, 且存在可测函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 依测度收敛于 f,$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 依测度收敛于 g, 证明：$\{f_n g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 依测度收敛于 fg.

5. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上几乎处处有限的可测函数. 证明：$f \in L(\mathbb{R})$ 当且仅当

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m(\{|f| \geqslant 2^k\}) < +\infty.$$

6. 设 $f \in L(E), E \subseteq \mathbb{R}, m(E) > 0$. 证明：$F(x) = \int_{(-\infty,x)\cap E} f(t)\mathrm{d}t$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

7. 设 $f \in L(E), E \subseteq \mathbb{R}, m(E) > 0$. 证明：$\lim\limits_{k\to\infty} \int_{E\cap\{|f|<\frac{1}{k}\}} |f(x)|\mathrm{d}x = 0$.

8. 设 f 在 $[a, b]$ 上绝对连续且无零点, 证明 $\dfrac{1}{f}$ 是 $[a, b]$ 上绝对连续函数.