2024-2025 学年第二学期数学类实变函数期末考试

回忆：鸢喙

1. (10 分) 设集合列 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ 有极限. 求证:

$$\lim_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \cup \lim_{n\to\infty} B_n.$$

2. (10 分) 设 G_1, G_2 都是开集, 求证:

$$m(G_1 \cup G_2) = m(G_1) + m(G_2) \Leftrightarrow G_1 \cap G_2 = \emptyset.$$

3. (a) (5 分) 叙述 Lusin 定理;

(b) (10 分) 设 f 是可测集 D 上几乎处处有限的可测函数, 求证: 有 D 上连续函数列 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛于 f.

4. (15 分) 设 f, g 是 $\mathbb{R}$ 上的有界可测函数, 且有可测函数列 $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ 分别测度收敛于 f, g. 求证: $\{f_n g_n\}$ 测度收敛于 fg.

5. (15 分) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上几乎处处有限的可测函数. 求证:

$$f \in L(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m(\{|f| \geq 2^k\}) < \infty.$$

6. (10 分) 设 $f \in L(E)$, E 为 $\mathbb{R}$ 上的可测子集, 且 $m(E) > 0$. 求证: 函数

$$F(x) = \int_{(-\infty,x)\cap E} f(t)dt$$

在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

7. (10 分) 设 $f \in L(E)$, E 为 $\mathbb{R}$ 上的可测子集, 且 $m(E) > 0$. 求证:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E\cap\{|f|<\frac{1}{k}\}} |f| dx = 0.$$

8. (15 分) 设 f 在 $[a, b]$ 上绝对连续且无零点, 求证 $\frac{1}{f}$ 在 $[a, b]$ 上绝对连续.