2024-2025学年度大类概率论期末考试

命题人：江一鸣

2025 年 6 月 23 日

1. (a) 一个袋子中有 9 个球，其中 5 个红球，4 个白球。连续不放回地随机摸取 3 个球，求摸出球的顺序为红、白、红的概率。
   (b) 甲和乙约定在7点到8点间会面，每人到达后只等待 20 分钟。求他们会面的概率。[1]
2. 设 ξ 是一个取正整数值的离散随机变量。证明 ξ 具有无记忆性，即对任意正整数 m 和 k，满足 $\mathbb{P}(\xi = m + k \mid \xi > m) = \mathbb{P}(\xi = k)$，当且仅当 ξ 服从几何分布。
3. 计算以下函数：
   (a) $\xi \sim P(\lambda)$的母函数。
   (b) $\eta \sim N(\mu, \sigma^2)$的特征函数。
4. 设随机变量 ξ 满足 $E\xi = 0$，$D\xi = \sigma^2 < \infty$。求证对任意 $\varepsilon > 0$，有:
$$\mathbb{P}\{|\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$
   和
$$\mathbb{P}\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}.$$
5. (a) 设二维随机变量 (ξ, η) 的密度函数为
$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$
   证明 ξ 和 η 不相关但不独立。

[1] 本题实际上隐形假设了甲乙二人的到达时间服从独立的均匀分布，但是卷子上并没有指出，尽管这是作业题————不要想太多。

(b) 存在常数 c 使得 $\mathbb{P}(X=c)=1$，Y 是任意随机变量。证明 X 和 Y 独立。

6. (a) 设 $\{\xi_n\}$ 是一列随机变量，ξ 是随机变量。若 ξ_n r 阶收敛于 ξ，证明 ξ_n 依概率收敛于 ξ。

   (b) 反之是否成立？即若 ξ_n 依概率收敛于 ξ，是否一定有 ξ_n r 阶收敛于 ξ ?说明理由。

7. (a) 叙述分布函数弱收敛的定义。

   (b) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，$\{F_n(x)\}$ 是在 $[a,b]$ 上弱收敛于函数 $F(x)$ 的一致有界非降函数序列，且 a 和 b 是 $F(x)$ 的连续点，求证：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,dF_n(x)=\int_a^b f(x)\,dF(x).$$