2024-2025学年度大类实变函数论期中测试

1. 构造在 $\mathbb{R}$ 上测度为 1 的开稠集。

2. 设 $A \cup B = \mathbb{R}$，证明
$$\overline{A} \cup B^{\circ} = \mathbb{R}.$$

3. 设 $\{A_n\}$、$\{B_n\}$、$\{C_n\}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的集合序列，且对所有 n 有
$$A_n \subseteq B_n \subseteq C_n,$$
并且
$$\liminf_{n\to\infty} A_n \;=\; \limsup_{n\to\infty} A_n \;=\; D, \quad \liminf_{n\to\infty} C_n \;=\; \limsup_{n\to\infty} C_n \;=\; D.$$
证明
$$\liminf_{n\to\infty} B_n \;=\; \limsup_{n\to\infty} B_n \;=\; D.$$

4. 证明勒贝格外测度 $m^*(E)$ 的等价定义：
$$m^*(E) \;=\; \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,\ I_n \text{ 为有界闭区间}\Big\}.$$

5. 设 $\{E_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的一列可测集，若
$$m(E_n) \;\longrightarrow\; 1 \quad (n \to \infty),$$
证明存在子序列 $\{E_{n_k}\}$，使得
$$m\big(\liminf_{k\to\infty} E_{n_k}\big) = 1.$$

6. 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为勒贝格零测集，证明
$$\sin E \;=\; \{\sin x : x \in E\}$$
也是零测集。

7. 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ，证明其第一类间断点的集合是可数集。

附注：最后一题并不是考场原题，考场原题是这里的弱化版，但具体问题笔者想不起来了，这里放出来的是和考场原题方法完全相同的课本题，同时也是作业题。