2024-2025学年度伯苓班实变函数论期中测试

1. 设 $A \subset \mathbb{R}$ 为可数集，记对于实数 x，
$$A_x = \{a + x : a \in A\}.$$
证明存在实数 x 使得
$$A \cap A_x = \emptyset.$$

2. 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为不可数集，证明存在点 $x \in E$ 使得对任意 $\delta > 0$，
$$E \cap (x - \delta, x + \delta)$$
仍然是不可数集。

3. 设函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足
$$f(x) + \cos\big(f(x)\big)$$
是可测函数，证明 $f(x)$ 是可测函数。

4. 设 $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}$ 任意，且已知勒贝格外测度满足
$$m^*(A_1 \cup A_2) = m^*(A_1) + m^*(A_2) < +\infty.$$
证明存在可测集 $E_1 \supset A_1$、$E_2 \supset A_2$，使得
$$m\big(E_1 \cap E_2\big) = 0.$$

5. 设 f 在闭区间 $[a, b]$ 上几乎处处有限，证明存在多项式序列 $\{p_n(x)\}$，满足
$$\sup_{x \in [a,b]} \big|p_n(x)\big| \le \sup_{x \in [a,b]} \big|f(x)\big|,$$
且
$$p_n(x) \longrightarrow f(x) \quad 对几乎处处\ x \in [a, b]$$
成立。

6. 设在 $[0, 1]$ 上定义函数序列 $\{f_n(x)\}$，对每个 n，f_n 关于 x 单调递增；且 f_n 依测度收敛到某函数 f。若 $x_0 \in (0, 1)$ 是 f 的连续点，证明
$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$