绝密★启用前

南开大学数学科学学院

最优化方法2024-2025期末测试卷

注意事项:

1. 命题人：杨庆之
2. 考试限时：100 分钟
3. 考试时间：2025 年 6 月 26 日
4. 数据难以记起，部分数字系人为捏造，因此算不出莫较真；记不得题面的也用类似的代替了。

一、解答题

1.（20 分）

（1）说明凸集的定义；

（2）给出分离超平面定理的描述；

（3）（本题题面略微不太记得）在 $\mathbb{R}^n$ 当中，如果系统 $Ax<0$ 无解，考虑集合 $C=\{x|Ax=0\}$ 以及 $D=\{x|x>0\}$，说明这导出了什么结论？

2.（20 分）

（1）给出凸函数的定义，并证明对凸函数 f 定义的 $L(f)=\{x|f(x)\leqslant t\}$，对任意 t 都为凸集.

（2）证明：凸优化问题的局部最小值就是整体最小值；

（3）证明：若函数 f 为凸函数，则 $f(y)\geqslant f(x)+\nabla f(x)^{\mathrm{T}}(y-x)$.

3. 线性规划：

（1）二元线性规划单纯形求解，化为标准形后有四个变元，无需添加人工变量；

（2）给定线性规划问题，化为标准形，并求其对偶问题。

4. 无约束优化：给定一个二元二次函数问题：

（1）用 Newton 法求最优解；

（2）用共轭梯度法迭代两步；

5. 有约束优化：

（1）给定一个二元二次函数问题与一个等式约束、一个不等式约束，用 KKT 方法求解最优解；

（2）用障碍罚函数法求解一个超越函数的最小值；

6. 设函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 连续可微，且梯度 Lipschitz 连续，即

$$\|\nabla f(x)-\nabla f(y)\|_2\leqslant L\|x-y\|_2,\forall x,y$$

求证: 利用最速下降法得到的序列 $\{x_k\}$ 满足 $f(x_{k+1})\leqslant f(x_k)+(x_{k+1}-x_k)^{\mathrm{T}}\nabla f(x_k)+\dfrac{L}{2}\|x_{k+1}-x_k\|_2^2$.