绝密★启用前

南开大学数学科学学院

数值代数2024-2025期末测试卷

注意事项:

1. 命题人：高冰
2. 考试限时：100 分钟
3. 考试时间：2025 年 6 月 20 日
4. 数据难以记起，部分数字系人为捏造，冰冰姐姐凑的数很好算，所以无须纠结本卷的数字，矩阵的阶数是对的。

一、解答题

1.（20 分）

给定 A 为对称且严格对角占优矩阵：

（1）写出一步 Gauss 消元法的过程；

（2）证明：对矩阵 A，Gauss 消元和列主元 Gauss 消元的计算结果一致.

2.（20 分）

给定矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 6 & 18 & 3 \\ 6 & 9 & 16 \end{pmatrix}, b = (0, 0, -1)^{\mathrm{T}}$$

（1）利用 Householder 变换求其 QR 分解；

（2）使用上一问结果求解最小二乘问题 $\min \|Ax - b\|_2^2$.

3.（20 分）

给定矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

（1）写出 Jacobi 迭代、Gauss-Seidel 迭代、SOR 迭代的迭代格式；

（2）说明对矩阵 A，Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代的收敛性，并比较收敛速度.

4.（20 分）

给定矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

, $b = (0, -1)^{\mathrm{T}}, x_0 = (0, 0)^{\mathrm{T}}$.

（1）使用最速下降法，迭代一步计算 x_1.

（2）使用共轭梯度法，迭代两步计算 x_2.

5.（20 分）

特征值问题：

（1）说明特征值幂法的算法内容，并说明其中的意义.

（2）对于 QR 迭代算法，设矩阵 A 进行 QR 迭代后得到

$$\widetilde{Q}_k = Q_1 Q_2 Q_3 \cdots Q_k, \widetilde{R}_k = R_k R_{k-1} \cdots R_1.$$

证明：对 A^k 进行 QR 分解，其结果恰为 $A^k = \widetilde{Q}_k \widetilde{R}_k$.