

2023-2024 春省身班泛函分析期末考试 (A 卷)

回忆者: cbj

考试时间: 2024 年 6 月 21 日

几乎全是作业题 (教材课后题), 刘锐老师太善良了!

题目 1. (10 分)

5. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, X_0 是 X 中的稠密子集, 证明: 对于每一 $x \in X$, 存在 $\{x_n\} \subset X_0$, 使得 $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

题目 2. (15 分)

15. 设 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 具有 Schauder 基 $\{e_n\}$, 用 M 表示所有使得 $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ 在 X 中收敛的数列 $\{\xi_k\}$ 的全体, 按通常方式定义线性运算构成的线性空间, 对于每一 $x = \{\xi_k\} \in M$, 定义

$$\|x\|_1 = \sup_n \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right\|,$$

证明 $(M, \|\cdot\|_1)$ 是 Banach 空间.

题目 3. (15 分)

4. 设 X 是 Banach 空间, 证明如果 X^* 是可分的, 则 X 也是可分的.

题目 4. (15 分) 证明 $(c_0)^* = l^1$.

题目 5. (10 分)

5. 设 H 是内积空间, M 是 H 的线性子空间. 证明如果对于每一个 $x \in H$, 它在 M 上的正交投影存在, 则 M 必是闭子空间.

题目 6. (15 分)

10. 设 X 是 Banach 空间, A, B 是 X 的闭子空间, 且 $X=A+B$. 证明存在常数 M , 使得每一个 $x \in X$ 有表示 $x=a+b$, 其中 $a \in A, b \in B$ 并且

$$\|a\| + \|b\| \leq M\|x\|.$$

题目 7. (15 分) 证明自反 Banach 空间的闭子空间也自反.

题目 8. (5 分) 证明任意可分度量空间都等距于一个可分 Banach 空间的子集.