

数理科学与大数据本科生2022-2023学年第二学期“数学分析II”第1次月考试题

一、(15分) 设曲线 Γ 的极坐标方程是 $r = \min \{2 \sin \theta, 2\sqrt{3} \cos \theta\}$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$), 求曲线 Γ 所围成的图形的面积.

二、(15分) 求 $y = \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 1$)绕直线 $y = x$ 旋转一周所得的旋转体的体积.

三、(15分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上非负连续, 令 $\varphi(x) = \int_a^b |x - t| f(t) dt$, $x \in [a, b]$. 证明: $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 下凸.

四、(15分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且满足 $0 \leq f(x) \leq x$, $x \in [0, 1]$. 证明:

$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 x^2 f(x) dx.$$

五、(15分) 设 $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \left(\sin \frac{\pi}{x} \right), & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 证明: $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可积.

六、(15分) 设函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续. 证明:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\lambda} \int_{-1}^1 f(x) e^{-\frac{|x|}{\lambda}} dx = f(0).$$

七、(10分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 1$, 对任意 $x \geq 0$, 有 $f'(x) \geq \int_0^x f(t) dt$. 证明: 对任意 $x \geq 0$, 有 $\int_0^x f(t) dt \geq x$.