

数理科学与大数据本科生2021-2022学年第一学期“数学分析I”月考2试题

一、(15分) 设  $f(x) = \begin{cases} [\frac{1}{x}], & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$  求出  $f(x)$  的所有间断点, 并说明它们分别属于哪一类型.

二、(15分) 设函数  $f(x)$  在点  $a$  处可导, 且  $f(a) \neq 0$ . 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right]^n$ .

三、(15分) 设  $0 < q < 1$ . 设  $y = y(x)$  是由方程  $x = y - q \sin y$  确定的隐函数. 求  $y''(x)$ .

四、(15分) 设  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $-1 < x < 1$ . 证明  $(1-x^2)y' - xy = 1$ , 并求  $y^{(n)}(0)$ .

五、(15分) 设函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  连续,  $|f(x)|$  在  $(a, b)$  可导. 求证  $f(x)$  也在  $(a, b)$  可导.

六、(15分) 设  $n \in \mathbb{N}^*$ , 函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  连续, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0$ . 求证:

(1) 当  $n$  是奇数时, 函数  $f(x) + x^n$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有零点;

(2) 当  $n$  是偶数时, 函数  $f(x) + x^n$  在  $(-\infty, +\infty)$  上取到最小值.

七、(10分) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  连续, 且满足  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$ . 求证  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .