

数理科学与大数据本科生2021-2022学年第一学期

“数学分析I” 期末考试试卷（A卷）

学号：

姓名：

注意事项

1. 解答必须写在答题卡上，写在本试卷上的解答无效.
2. 试卷共4页，共7道大题. 考生不得自行拆开装订成册的试卷.
3. 试卷的空白区域为草稿区，考试中不得使用自备草稿纸.

一、(15分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

二、(15分) 求不定积分 $\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx$.

三、(15分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 $[a, b]$ 上的连续函数，且 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值相等. 证明：存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = g(\xi)$.

四、(共15分，其中第1问10分，第2问5分)

(1) 证明：对任意 $x > 0$, 存在唯一的 $\theta(x) \in (0, 1)$ 满足 $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$.

(2) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x)$.

五、(15分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上无界. 证明: 存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得对任意 $\delta > 0$,

$f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$ 上无界.

六、(15分) 设实数 $\alpha < 1$. 证明: 函数 $f(x) = x^\alpha \ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续.

七、(10分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 且 $f(a)f(b) > 0$, $f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$. 证

明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = f(\xi)$.