

# 数学科学学院 2018 年统计计算 3-2 期末考试试卷

回忆人：张绰棋 2018 年 4 月

一、请描述用逆变换法生成服从分布  $F(x)$  的方法，并证明之。

二、(筛选抽样法) 若密度函数  $f(x)$  可表成  $f(x) = cg(x)h(x)$ ，其中  $h(x)$  为一密度函数， $0 \leq g(x) \leq 1$ ， $c \leq 1$  为一常数，则可根据如下方法抽取  $X \sim f(x)$ ：

i) 从  $U(0, 1)$  中抽取  $u$ ，然后从  $h(y)$  中抽取  $Y$ ；

ii) 若  $u \leq g(Y)$ ，则令  $X = Y$ ；

iii) 若  $u \geq g(Y)$ ，则回到 i)。

(1) 证明上述抽样方法的有效性。

(2)  $f(x) = \sqrt{\frac{2e}{\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} e^{-x}$ ，请利用逆变换法以及筛选抽样法描述生成服从  $f(x)$  随机数的步骤。

三、两个独立的随机变量  $X \sim U(0, 2)$ ,  $Y \sim U(0, 2)$ ，请利用  $X, Y$  描述一种简便的近似估计  $\pi$  的方法。

四、请描述用二分法求取方程的根的方法步骤，并描述二分法的优点 (至少一个) 和缺点 (至少一个)。

五、请描述 Monte Carlo 方法求定积分  $\int_0^3 e^{x^7+x}$  的步骤。

六、设  $X$  为随机变量， $f(x)$  与  $g(x)$  均为单调递增的函数，证明  $\text{Cov}(f(x), g(x)) \geq 0$ 。

七、请用牛顿法求  $g(x) = -\frac{\ln 2x}{2x+1}$  的最小值。

八、Zero-inflated 二项分布：设  $X_i$  以概率  $1-p$  服从常数零分布，以概率  $p$  服从  $B(n_i, r)$ ， $i = 1, 2, \dots, m$ 。其中， $X_i$  之间相互独立， $n_i$  均为已知正整数， $p, r$  为待估参数。令  $Z_i = 1$ ，若  $X_i$  来自常数零分布； $Z_i = 0$ ，若  $X_i$  来自二项分布。请利用 EM 算法求参数  $p, r$  的极大似然估计。

九、观测数据  $x_i$  与  $y_i$  有如下线性回归方程  $y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i$ ，其中  $\epsilon_i$  相互独立并服从  $N(0, \sigma^2)$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。记观测数据通过最小二乘法得到的  $\beta$  估计值为  $\hat{\beta}$ ，分别写出参数 bootstrap 法以及非参数 bootstrap 法估计  $\hat{\beta}$  绝对值的对数的方差，即估计  $\text{Var}(\log |\hat{\beta}|)$ 。

参数法：

非参数法：