

南开大学数学科学学院 2016-2017 学年第一学期数学分析期中测试

命题：刘锐

1、已知函数 $f(x) = \sin ax + \cos bx$ ，求证：当且仅当 $\frac{b}{a}$ 为有理数时， $f(x)$ 为周期函数。

2、求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{C_n^0} + \frac{1}{C_n^1} + \dots + \frac{1}{C_n^n} \right)$

3、求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$

4、已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 连续，且 $f(0) = f(2)$ 。求证：存在 $x_1, x_2 \in [0, 2]$ ，满足：

① $x_1 - x_2 = 1$ ； ② $f(x_1) = f(x_2)$ 。

5、 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导。 $n \rightarrow \infty$ 时，化简 $f\left(a + \frac{1}{n^2}\right) + f\left(a + \frac{2}{n^2}\right) + \dots + f\left(a + \frac{n}{n^2}\right) - nf(a)$ 。

6、已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 。求证：对于 $\forall n \in \mathbb{N}$ ，函数 $f(x)$ 满足 n 阶可导。