数学科学学院 2015 届数学分析 3-2 期末考试参考答案

(本答案以张万鹏回忆版为基础) ZYChokie

一、讨论 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在 $(0,0)$ 处的可微性.

解：令 $A=\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,$

$B=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$

现求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-Ax-By}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta,$

则上述极限 $=\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{r\sqrt{|\cos\theta\sin\theta|}}{\sqrt{r^2}}=\sqrt{|\cos\theta\sin\theta|},$

可见上述极限显然不存在，则由可微性的定义即有 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

二、设 $u=u(x)$ 为由方程组 $\begin{cases} u=f(x,y,z)\\ g(x,y,z)=0\\ h(x,y,z)=0\end{cases}$ 确定的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解：对题目中三个等式两端求全微分，得到以下三个等式：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z=\mathrm{d}u\\ \dfrac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y+\dfrac{\partial g}{\partial z}\mathrm{d}z=0\\ \dfrac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y+\dfrac{\partial h}{\partial z}\mathrm{d}z=0\end{cases}$$

将以上三个等式看作以 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 为变量的线性方程组，即解得

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u\dfrac{D(g,h)}{D(y,z)}}{\dfrac{D(f,g,h)}{D(x,y,z)}}\text{，即 }\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{D(f,g,h)}{D(x,y,z)}}{\dfrac{D(g,h)}{D(y,z)}}.$$

三、求 $f(x,y,z)=x+y+z$ 在条件 $xy+yz+xz=1$ 下的条件极值.

解：令 $L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda(xy+yz+xz-1)$ (λ 待定).

解方程组 $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1+\lambda(y+z)=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1+\lambda(x+z)=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 1+\lambda(x+y)=0 \\ xy+yz+xz-1=0 \end{cases}$ 即可解得 $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}, \lambda=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $x=y=z=-\frac{\sqrt{3}}{3}, \lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

而 $\mathrm{d}L = (1+\lambda(y+z))\mathrm{d}x + (1+\lambda(x+z))\mathrm{d}y + (1+\lambda(x+y))\mathrm{d}z$,

$\mathrm{d}^2 L = \lambda(2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}z)$.

由 $xy+yz+xz=1$ 两边取微分得,$(y+z)\mathrm{d}x+(x+z)\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z=0$, 由于对上述两解均有 $x=y=z$,

于是 $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=0$, 两边取平方即有 $2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\mathrm{d}x\mathrm{d}z+2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-(\mathrm{d}^2x+\mathrm{d}^2y+\mathrm{d}^2z)$.

因此 $\mathrm{d}^2L=-\lambda(\mathrm{d}^2x+\mathrm{d}^2y+\mathrm{d}^2z)$.

当 $\lambda=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,$\mathrm{d}^2L\geqslant 0, f(x,y,z)$ 取极小值, 为 $f(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})=\sqrt{3}$.

当 $\lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,$\mathrm{d}^2L\leqslant 0, f(x,y,z)$ 取极大值, 为 $f(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3})=-\sqrt{3}$.

四、求 $I=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}[y-x]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数).

解：记 $D=x^2+y^2\leqslant 1$. 易知当 $(x,y)\in D, y-x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}\,]$.

把区域 D 分成四个区域,

$D_1=\{(x,y)|-\sqrt{2}\leqslant y-x<-1\ \}\bigcap D$,

$D_2=\{(x,y)|-1\leqslant y-x<0\ \}\bigcap D$,

$D_3=\{(x,y)|0\leqslant y-x<1\ \}\bigcap D$,

$D_4=\{(x,y)|1\leqslant y-x\leqslant\sqrt{2}\ \}\bigcap D$.

则 $I=-2\iint_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2|D_1|-|D_2|+|D_4|$.

显然有 $|D_1|=|D_4|$ 且 $|D_1|+|D_2|=\dfrac{\pi}{2}$, 因此 $I=-\dfrac{\pi}{2}$.

五、求 $I=\iint_{|x|+|y|\leqslant 4}\dfrac{|x^3+xy^2-2x^2-2xy|}{|x|+|y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解：记 $D=|x|+|y|\leqslant 4, |D|=32$, 有 $|x^3+xy^2-2x^2-2xy|=|x||x^2+y^2-2x-2y|$.

区域 D 关于 x,y 是对称的, 且根据变量的对称性就有

$$I=\iint_D\frac{|x||x^2+y^2-2x-2y|}{|x|+|y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{|y||x^2+y^2-2x-2y|}{|x|+|y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

可得 $I=\dfrac{1}{2}\iint_D|x^2+y^2-2x-2y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I=\dfrac{1}{2}\iint_D|(x-1)^2+(y-1)^2-2|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

记 $D_1 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 2$. 由于 $D_1 \subseteq D$, 将区域 D 分为两个区域,D_1 和 $D \setminus D_1$.

再记 $I_1 = \dfrac{1}{2}\iint_{D_1}(2x+2y-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

$I_2 = \dfrac{1}{2}\iint_{D\setminus D_1}(x^2+y^2-2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \dfrac{1}{2}\iint_{D}(x^2+y^2-2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + I_1$

$I_3 = \dfrac{1}{2}\iint_{D}(x^2+y^2-2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

则 $I = I_1 + I_2 = I_3 + 2I_1$.

根据 D_1 关于 x, y 的对称性,$I_1 = \iint_{D_1}(1-(x-1)^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 经过极坐标代换容易解出 $I_1 = \pi$.

同理, 有 $I_3 = \iint_{D}((x-1)^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D}(x-1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 32$.

作变换 $u = x+y, v = x-y$, 得 $x = \dfrac{u+v}{2}, y = \dfrac{u-v}{2}$. 则 $\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \dfrac{1}{2}$.

区域 $D \to D', D' = \{(u,v)|u \in [-4,4], v \in [-4,4]\}$.

$I_3 = \dfrac{1}{2}\iint_{D'}(\dfrac{u+v}{2}-1)^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v - 32 = \dfrac{1}{2}\int_{-4}^{4}\mathrm{d}v\int_{-4}^{4}(\dfrac{u+v}{2}-1)^2\mathrm{d}u - 32 = \dfrac{256}{3}$.

$I = \dfrac{256}{3} + 2\pi$.

六、求 $I = \iiint_D (x^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. 其中区域 D 是由曲面 $x^2+y^2 = 2-z$ 和 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的区域.

解：联立两曲面方程，消去 z，即得 D 在 xOy 上的投影为 $x^2+y^2 \leqslant 1$.

因此 $D = \{(x,y,z)|x^2+y^2 \leqslant 1, \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 2-x^2-y^2\}$.

$I = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x^2-y^2}(x^2+z^2)\mathrm{d}z$.

经过坐标变换 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$, 有

$$I = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^{2-r^2}(r^2\cos^2\theta + z^2)\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi} cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3(2-r^2-r)\mathrm{d}r + \frac{2\pi}{3}\int_0^1 r((2-r^2)^3 - r^3)\mathrm{d}r$$

$$= \pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{5}) - \frac{\pi}{3}\int_0^1(2-r^2)^3\mathrm{d}(2-r^2) - \frac{2\pi}{15}$$

$$= -\frac{\pi}{12}(2-r^2)^4\Big|_0^1 = \frac{5\pi}{4}.$$