

实变函数论期中考试 2020-2021 (春)

命题人：高泳昕老师

考试时间：2021年4月30日

1. 设集合 $E, \forall x, y \in E (x - y \in \mathbb{Q})$, 证明: E 为至多可数集。
2. 设定义在 \mathbb{R} 上的函数 f, f 只取整数值, 证明: f 的间断点集为闭集。
3. 设函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 满足 $\forall A \subset \mathbb{R} (m^*(f(A)) = m^*(A))$, 证明: 若 $f(E)$ 为可测集, 则 E 为可测集。
4. 若 A 为可测集, B 为不可测集, 证明: $A \Delta B$ 为不可测集。
5. 设 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为一列可测集, 满足 $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < +\infty$. 证明: $\exists A \subset \mathbb{R}, m(A) = 0, s.t. \forall x \in A^c, x$ 至多属于有限个 E_k .