

# 2021-2022 学年第一学期抽象代数试卷

命题人：王秀玲

考试时间：2021 年 12 月 30 日

一、(10 分) 证明  $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$  对矩阵的加法与乘法运算构成环；并举出  $R$  中的一个元素，它是左零因子而不是右零因子

二、(10 分) 写出  $\mathbb{Z}_9$  的所有理想，素理想与极大理想

三、(10 分)  $R$  为交换环,  $I$  为  $R$  的一个非零理想, 记  $r(I) = \{a \in R \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \neq 0, a^{n_0} \in I\}$  证明  $r(I)$  也是  $R$  的一个理想

四、(10 分) 求  $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$  在  $\mathbb{Q}$  上的次数, 并举出  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$  作为  $\mathbb{Q}$  上线性空间的一组基

五、(20 分)

(1). 证明  $x^2 + 1$  是  $\mathbb{Z}$  上的不可约多项式, 而  $\mathbb{Z}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$  不是一个域

(2). 证明  $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$  是一个域

六、(20 分) 考虑环  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

(1) 证明环的单位有且仅有  $\pm 1$

(2) 证明 3 是环中的不可约元, 但不是素元

(3) 该环是否为唯一分解整环? 说明理由

七、(10 分)  $p$  是素数, 考虑环  $R = \left\{ \frac{m}{n} \mid \frac{m}{n} \text{ 已约分且 } (n, p) = 1 \right\}$ , 证明  $R$  为主理想整环

八、(10 分) 设  $K$  为  $F$  的扩域

(1)  $u \in K$  是  $F$  上的代数元, 且  $\deg(u, F)$  为奇数, 证明  $F(u^2) = F(u)$

(2) 若  $F(u^2) = F(u)$ , 是否可以得出  $u$  是  $F$  上的代数元? 说明理由

(18 化学邓哲整理, 很多题的描述与原卷不完全一致, 大家练习一下就好, 如有疏漏还望理解, 预祝各位考试顺利! )