

# 2021-2022 学年度第一学期伯苓班抽象代数 期末考试

回忆人: xyc

- 一 (20 分) 判断下列命题是否正确, 如果正确请给出证明, 不正确请举出反例.
- 1 如果二元关系  $R$  满足对称性和传递性, 那么它一定满足反身性。
  - 2 群  $G$  中所有有限阶元素组成的集合  $H$  构成  $G$  的正规子群。
  - 3 如果  $A$  是环  $R$  的素理想,  $P$  是  $A$  的素理想, 那么  $P$  是  $R$  的素理想。
  - 4 对任意无限整环  $R$ , 都  $\exists u, v \in R, u, v \neq 0$ , 使得  $\{ku + lv | k, l \in \mathbb{Z}\}$  是无限集。
- 二 (20 分) 么环  $R$  中, 证明:  $\forall a, b \in R, e - ab$  可逆当且仅当  $e - ba$  可逆。
- 三 (20 分) 设群  $G$  满足  $|G| = 120, H < G, |H| = 24$ 。证明: 如果  $\exists g \in G - H$ , 使得  $gHg^{-1} = H$ , 那么  $H \triangleleft G$ 。
- 四 (15 分) 证明如果无零因子环  $R$  满足  $|R|$  是偶数, 那么环  $R$  的特征为 2。
- 五 (15 分) 设  $G_1$  是  $\{\mathbb{Q}; +\}$  的真子群, 证明存在  $G_2$ , 其为  $\{\mathbb{Q}; +\}$  的真子群且  $G_1 \subset G_2, G_1 \neq G_2$ 。
- 六 (10 分) 交换环  $R$  无非零幂零元。证明: 对于  $u, v \in R$ , 如果  $\exists a, b \in \mathbb{N}, (a, b) = 1$  使得  $u^a = v^a, u^b = v^b$ , 则  $u = v$ 。