

2016 级数学科学学院抽象代数期中测试（数学类）

命题：王秀玲

一、填空题（记忆不完全）

1、整数集 \mathbb{Z} 中定义运算“ $*$ ”： $a*b = a + b - ab$ 。则此运算_____二元运算， \mathbb{Z} 关于此运算_____半群，_____群。（选填“是”与“不是”）

2、 S_3 是 3 元对称群， $H = \{(1), (12)\}$ 。则 S_3 对 H 所有的左陪集为_____，

S_3 子群的个数为_____。

3、 $\sigma = (134)(57)$ ， $\tau = (327)(26)(14)$ ，则 $\sigma\tau\sigma^{-1} =$ _____。

4、无限循环群 $\langle a \rangle$ 的生成元为_____， n 阶循环群生成元的个数为_____。

5、

二、判断题：（判断以下命题命题是否正确，并说明理由）

1、 H 是群 G 的子群，且 $[G:H]=2$ ，则 H 是 G 的正规子群。

2、 G 是群， $|G|=8$ ，则群 G 中必有 2 阶元。

3、设 $f:G_1 \rightarrow G_2$ 是同态，则 $|f(G_1)|$ 整除 $|G_1|$ 。

4、无限循环群 G 除 $G/\langle e \rangle$ 外的商群均为有限群。

5、【考察二面体群和可解群】

歪个楼 完全没想到居然考了这个问题 心痛到变形 根本没看题就跳过了……

三、证明题：

1、设 G 是群， e 是 G 中的幺元。若 G 中任意元素 x 满足 $x^2 = e$ 。证明： G 必有 4 阶子群。

2、设 $K = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ ， S_4 是 4 元对称群。证明：

(1) K 是 S_4 的正规子群；(2) S_3 是 3 元对称群，有商群 S_4/K 同构于 S_3 。

3、设 G 是群， $H \triangleleft G$ ，且 $([G:H], |H|) = 1$ 。证明：设 $N < G$ ，则 $N \subseteq H$ 。