

2016~2017 学年第二学期高等代数与解析几何 2-2 期末测试

命题人：耿薇

1、求与下列三条直线都共面的直线，运动产生的曲面方程：

$$l_1: \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}; l_2: \begin{cases} x=-1 \\ y=-z \end{cases}; l_3: \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+2}{5}。并判断此曲面是何种曲面，若其是直纹面，求其直母线。$$

2、设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ，求 A^m 。

3、设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是欧氏空间 V 的一组基，其度量矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ ， $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$ 。

求证：(1) β_1 是单位向量；(2) 已知 $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + k\alpha_3$ ，求 k 的值使 β_2 与 β_1 正交；

(3) 由 β_1, β_2 出发，求 V 的一组标准正交基。

4、设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX$ 是一实二次型， $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的特征多项式的根，且

$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ 。证明：对任一 $X \in R^n$ ，有 $\lambda_1 X'X \leq X'AX \leq \lambda_n X'X$ 。

5、已知 A 是 $n \times n$ 实矩阵， β 是 n 维实向量，求证：线性方程组 $AX = \beta$ 有解的充要条件是

β 与 $A'X = 0$ 的解空间正交。

6、求证：任一复矩阵 A 可分解为两个矩阵： $A=B+C$ ，其中 B 与某对角矩阵相似， C 是幂零矩阵，且 $BC=CB$ 。

7、设 A, B 是两个 $n \times n$ 实对称矩阵，且 A 正定，证明：存在一个 $n \times n$ 实可逆矩阵 T 使得 $T'AT$ 与 $T'BT$ 同时为对角形。